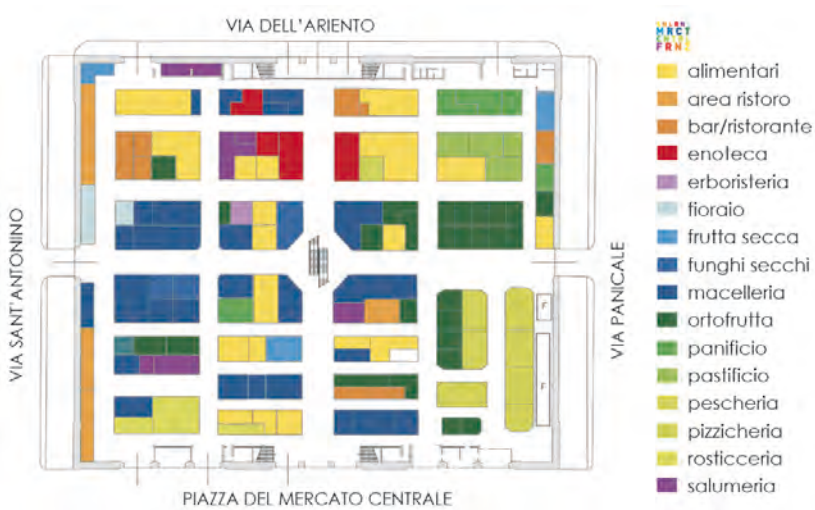
Un esempio di teoria dei giochi: i venditori di gelato

Camminiamo per una città e troviamo tre mercerie di seguito... Come faranno a fare affari? Non sarebbe meglio se stessero più lontano? La matematica della probabilità ci spiega il perché.

Franco Bagnoli,
Dipartimento di Fisica
e Astronomia e CSDC,
Università di Firenze

È un'esperienza comune che negozi simili si trovino vicino, spesso porta a porta: in ogni città c'è la via delle librerie, quella delle mercerie o dei negozi di calzature. Anzi, spesso le strade prendono proprio il nome delle attività che vi erano praticate, almeno in tempi antichi. A Firenze abbiamo via Calimala, dove si lavoravano i panni francesi, via dei Calzaioli, borgo Tegolaio, via dell'Arte della Lana... senza contare via delle Belle Donne, in cui si svolgeva un'attività che è facile da indovinare. Se pensiamo poi ai mercati, ci rendiamo conto che si tratta proprio della concentrazione più estrema di negozi molto simili.



Mappa delle botteghe presenti nel mercato centrale di Firenze. Ogni rettangolo è un negozio distinto.

Ma perché c'è questa attrazione? Non sarebbe meglio per i negozi disperdersi in modo da essere statisticamente più vicini ai potenziali clienti? E d'altra parte, è risaputo che i grandi partiti tendono a diventare quasi indistinguibili tra loro, presentando programmi sempre più simili. Perché?

Un modello matematico

Nel 1928 Harold Hotelling, uno statistico statunitense, pubblicò un lavoro presentando un modello – oggi si direbbe di "teoria dei giochi" – che cerca di spiegare questa forza di attrazione [1]. Prendiamo per esempio il caso di una spiaggia rettilinea di una certa lunghezza, in cui i bagnanti siano disposti in maniera uniforme. Sulla spiaggia ci sono anche due carretti di gelati, e il presupposto è che i clienti vadano verso il carretto più vicino per comprare il rinfresco. Ovviamente, la situazione ideale per i clienti è che i due carretti si posizionino a 1/4 e 3/4 della spiaggia, in modo da minimizzare la distanza da percorrere. Invece i due carretti si metteranno al centro della spiaggia, attaccati l'uno all'altro. Infatti, se uno dei

La disposizione stabile di due gelatai secondo il modello di Hotelling.

due si spostasse da tale posizione, l'altro gli andrebbe dietro "rubandogli" tutti i clienti che stanno nel lato più lungo della spiaggia.

Questo forse è un modello troppo ideale. Si può pensare che ci sia anche un costo di viaggio (per esempio, se c'è da fare troppa strada una persona può rinunciare al gelato) e, in tal caso, a seconda di come il costo sale con la distanza, si può avere un allontanamento tra i negozi.

Nel 2006 Pablo Jensen studiò la distribuzione dei negozi nella città di Lione [2] e trovò che la legge di Hotelling non vale per tutti i negozi: quelli che vendono prodotti di uso comune e di basso valore – come i fornai (i negozi di alimentari in generale) o i giornalai – sono ben distribuiti, mentre altri – come i negozi di calzature – si raggruppano spesso all'interno dei centri commerciali. I negozi che vendono oggetti costosi, come i concessionari auto e i gioiellieri, tendono ancor più a stare raggruppati. Durante un seminario Pablo riportò un episodio illuminante. Un piccolo agglomerato vicino a Lione voleva incrementare il numero di persone che lo frequentavano aprendo un centro commerciale, e i gestori domandarono a varie imprese se volevano spostarsi lì. Almeno una di queste disse che vi sarebbe andata solo se lo avesse fatto anche un altro negozio con lo stesso tipo di mercanzia.

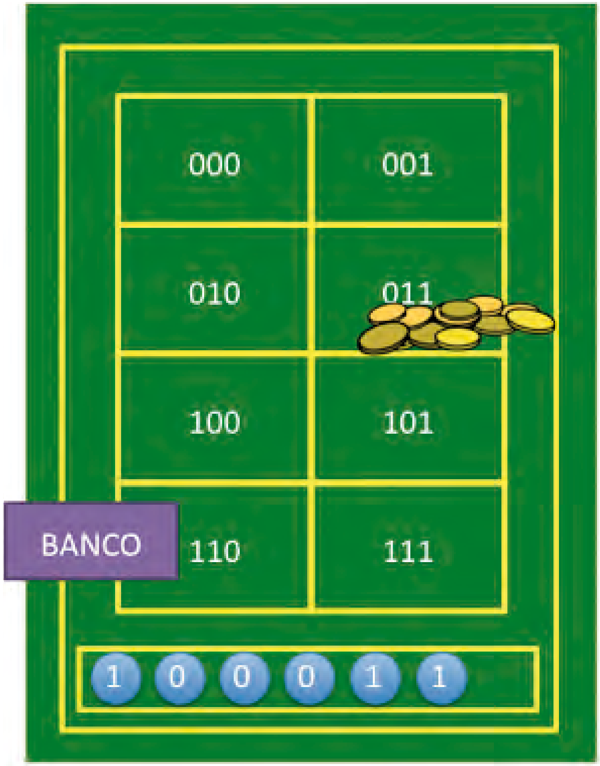
Evidentemente c'è un vantaggio, e non solo una competizione, nello stare vicino. In effetti, si può pensare che quando un potenziale cliente intraprende un viaggio per acquistare qualcosa, cerchi di ottimizzare il costo dello spostamento, e quindi preferisca andare verso un luogo che presenti una grande varietà di merci (centro commerciale) o comunque con la possibilità di confrontare prodotti in differenti negozi (per esempio, provare due auto di marche differenti nello stesso viaggio).

Il gioco di Penney

Ma restiamo al modello di Hotelling. Abbiamo recentemente scoperto che ci sono delle interessanti connessioni con un gioco che si può fare a casa con delle monete o delle carte, il gioco di Penney [3].

Il gioco consiste nello scommettere su quale sequenza di testa o croce (o di carte rosse e nere) esce prima. Sì, sappiamo bene che *tutte* le sequenze di una certa lunghezza, se le monete non sono truccate, hanno la *stessa* probabilità di apparire in un lancio "secco": ma la probabilità di uscire *prima o dopo* non è la stessa! Prendiamo per esempio sequenze di due simboli, chiamiamoli 1 e 0 (o "testa" e "croce"). Per simmetria, 11 ha lo stesso tempo medio di prima apparizione di 00

Evidentemente c'è un vantaggio, e non solo una competizione, nello stare vicino.



Un ipotetico tavolo da gioco per il modello di Penney. Lo sfidante punta su una sequenza, e il banco ne sceglie un'altra. Quindi si estraggono delle monete (testa o croce) o delle carte (rosse e nere) e si continua finchè non esce una delle due sequenze. In questo caso ha vinto lo sfidante.

(possiamo chiamare 1 "testa" e 0 "croce" ma se scegliamo il contrario non deve cambiare nulla) così come 10 ha lo stesso tempo medio di prima apparizione di 01. Paragoniamo allora le sequenze 00 (giocatore A) con 10 (giocatore B). Tiriamo la prima moneta. Se esce 1 (probabilità 1/2) B ha già vinto, gli basta aspettare che esca uno 0. Se esce 0 e poi esce un 1 (probabilità 1/4) di nuovo vince B. A può vincere solo se escono due 0 di seguito al primo lancio! Quindi B vince con una probabilità pari a 3/4 e A solo con una probabilità di 1/4. Per convincervi, nella figura in basso sono riassunti tre ipotetici scontri (nel caso in cui p possa essere anche diversa da 1/2).

Si noti che questo risultato dipende dal fatto che siamo partiti dalla situazione in cui non avevamo nessuna moneta sul tavolo, perché se lanciamo una lunga sequenza di monete e poi contiamo quante volte appare una certa sequenza, tutte le sequenze sono uguali, quindi il tempo di prima apparizione di una sequenza *partendo dalla stessa sequenza* è costante [4].

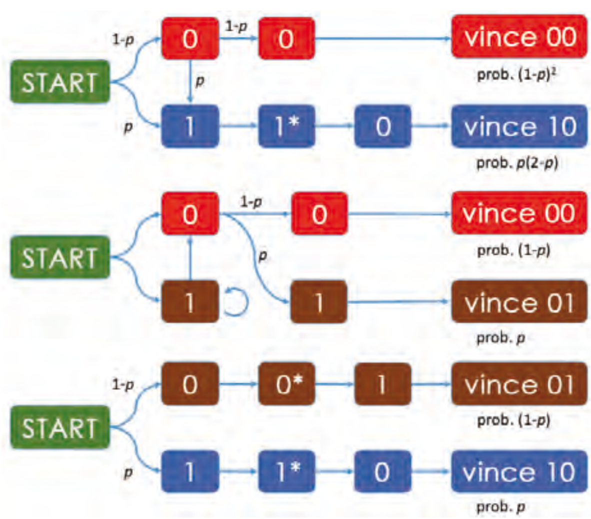
Ma non è tutto. Incredibilmente, se si usano sequenze lunghe almeno tre simboli, non abbiamo una sequenza dominante: alcune sequenze perdono sempre, ma tra quelle vincenti c'è un ordine circolare. Data una sequenza, dunque, se ne può sempre trovare un'altra che statisticamente la batte. È un po' come giocare a sasso, carta e forbice (o morra cinese). Questi giochi si chiamano *non transitivi*. Potremmo immediatamente applicare tale scoperta provando a farci dei soldi, ma si può fare di più.

Catene di Markov

Il gioco di Penney consiste nello scommettere su quale sequenza di testa o croce esce prima.

Per cominciare, si possono vedere le sequenze come dei simboli, per esempio leggendole come numeri in base due (in cui 101 = 5). Poi si può costruire la matrice che, data una sequenza, indica la probabilità che sia seguita da un'altra: se ho 101 = 5, al passo seguente posso avere solo 010 = 2 o 011 = 3. Quindi posso riformulare l'estrazione delle monete come la generazione di una serie di numeri, che però escono in maniera condizionata. È quella che in matematica si chiama una *catena di Markov*.

Per ogni catena di Markov si può provare a costruire un indice di non transitività: basta calcolare la matrice delle vittorie, cioè calcolare, per ogni coppia di simboli, la probabilità che uno esca prima dell'altro. Se in ogni colonna compare almeno un elemento maggiore di 1/2 vuol



Tre scontri per sequenze lunghe 2. Il calcolo è stato fatto per monete che possono essere truccate, le monete "oneste" corrispondono a $p = 1/2$.

I NUMERI IN BASE 2. Per scrivere i numeri in base 2 non si deve far altro che considerare i numeri come somme di potenze di 2. Tutti i numeri possono essere scritti come somma di potenze di 2, prendendo ciascuna potenza una volta al massimo. Scrivendo le potenze in ordine decrescente e assegnando un 1 se la potenza viene inclusa nella somma o uno 0 se la potenza non viene inclusa, si ha la forma in base 2, o forma binaria.
Per esempio $21 = 2^4 + 2^2 + 2^0$.
Quindi:

2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
sì (1)	no (0)	sì (1)	no (0)	sì (1)

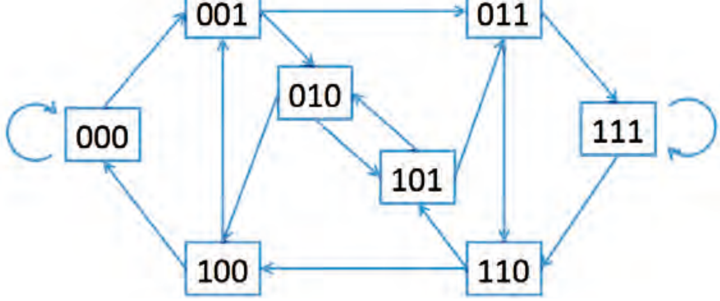
Dunque 21 = 10101.

Nel caso del lancio di monete procederemo al contrario, interpretando come un numero una sequenza di 1 e 0. Per esempio 10010 può essere letto come $2^4 + 2^1 = 33$.

dire che, data una sequenza, ce n'è sempre una che la batte, ovvero che il gioco è non transitivo. Anzi, calcolando la differenza tra il minimo di tali numeri e 1/2 si ottiene anche un'indicazione di quanto il gioco sia non transitivo.

Ma come si fa a calcolare la matrice delle vittorie per una catena di Markov generica? Una catena di Markov si può rappresentare come un grafo, in cui i nodi sono i simboli e i collegamenti indicano la probabilità di passare da un simbolo all'altro. La generazione della sequenza è data da un camminatore che percorre casualmente il grafo, facendo dei passi secondo le probabilità date. Possiamo anche mettere più camminatori sul grafo e farli andare insieme, non si disturbano.

Dato che quando escono i simboli su cui abbiamo scommesso il gioco si ferma, è come se questi simboli fossero delle trappole da cui i camminatori non possono uscire. All'inizio tutti i simboli sono equiprobabili, quindi partiamo con un certo numero (grande) di camminatori distribuiti in maniera uniforme sui nodi. A questo punto non ci resta che far vagare i camminatori, i quali via via scompariranno nelle due trappole. Quando anche l'ultimo è scomparso, contiamo quanti sono caduti nella prima trappola e quanti nella seconda e vediamo chi ha vinto.



Grafo della catena di Markov delle sequenze lunghe 3. Ogni collegamento ha probabilità 1/2.

Tornando ai negozi

Come si può vedere, un risultato generale è che per avere un grafo non transitivo ci vuole un certo grado di asimmetricità nei collegamenti.

Per avere un grafo non transitivo ci vuole un certo grado di asimmetricità nei collegamenti.

Ecco quindi la relazione con il modello di Hotelling per una città, in cui i nodi sono i posti in cui è possibile aprire un negozio e i collegamenti sono le strade. Supponiamo che i clienti siano camminatori casuali, e che scelgano sempre di fare acquisti nel primo negozio che incontrano (che naturalmente venda la merce cercata). Se supponiamo inoltre che i clienti abitino in maniera uniformemente distribuita nella città, ecco che abbiamo un indicatore che ci dà il "vantaggio" di un posto rispetto a un altro. Il modello può facilmente essere adattato a distribuzioni abitative diverse.

Il risultato è che se una città ha tutte strade a doppio senso, non può che essere transitiva, ovvero ci sono delle posizioni migliori e altre peggiori. Ma se ci sono abbastanza strade a senso unico allora potrebbe essere non transitiva, ovvero potrebbe succedere che ci siano delle collocazioni "buone" che però

CAMMINATORI CASUALI. In fisica, ma anche in altre discipline (per esempio in finanza), c'è spesso bisogno di modellizzare il movimento di una particella o di un individuo. In mancanza di altre informazioni, si usa il modello del camminatore casuale (o *random walk*), detto anche del marinaio ubriaco. Uno dei primi a sfruttare questa idea fu Einstein che nel 1905 usò tale modello per studiare il moto browniano, ovvero il moto di piccole particelle (ad esempio grani di polline) sballottate dalle collisioni con le molecole di acqua. Il risultato principale di Einstein fu che, se gli sballottamenti sono simmetrici, la posizione media del camminatore non cambia dal punto di partenza, ma l'ampiezza quadratica media delle oscillazioni (la varianza) cresce nel tempo. Con questo modello Einstein fu in grado di mettere in relazione grandezze molecolari come il numero di Avogadro con altre grandezze macroscopiche come la temperatura e la viscosità, e permise a Perrin di vincere il Nobel nel 1926.

Infine, altro fatto curioso: in una o due dimensioni un camminatore casuale ritorna sempre al punto di partenza, mentre in tre dimensioni la probabilità di "tornare a casa" è minore di uno, ma non nulla (circa il 24%). In quattro dimensioni o più, invece, la probabilità che il camminatore ritorni all'origine è nulla. Questo fa sì che molti fenomeni che si basano sui cammini casuali siano "semplici" in quattro dimensioni e complicati in tre, e forse è la ragione per cui la vita può esistere solo in un mondo tridimensionale.

possono essere "oscurate" da altre, in maniera circolare. L'esempio più estremo è quello di una sola strada circolare: se il cerchio si può percorrere nei due sensi, tutti i nodi sono equivalenti, se si può percorrere solo in un senso allora ogni nodo ne ha altri che lo possono "oscurare".

A questo punto sembrerebbe che la conclusione sia che questa analisi serve a poco: se la città è transitiva allora ci sono dei posti "migliori" di altri, posti che però saranno certamente già occupati. Se è non transitiva, è vero che posso rubare i clienti ai negozi di successo, ma nella stessa maniera posso venir oscurato dal terzo venuto. Beh, non è così! Un'analisi un po' più difficile da illustrare [5] mostra che in alcuni casi è possibile scegliere un posto che permette di rubare abbastanza clienti al negozio di successo, senza esporsi al rischio di venir oscurato a sua volta, perché un terzo venuto preferirà rubare anche lui clienti al primo negozio. Riassumendo: chi si accontenta (di rubare poco), gode.

In alcuni casi è possibile scegliere un posto che permette di rubare abbastanza clienti al negozio di successo, senza esporsi al rischio di venir oscurato a sua volta.

	000	001	010	011	100	101	110	111
000	0	1/2	2/5	2/5	1/8	5/12	3/10	1/2
001	1/2	0	2/3	2/3	1/4	5/8	1/2	7/10
010	3/5	1/3	0	1/2	1/2	1/2	3/8	7/12
011	3/5	1/3	1/2	0	1/2	1/2	3/4	7/8
100	7/8	3/4	1/2	1/2	0	1/2	1/3	3/5
101	7/12	3/8	1/2	1/2	1/2	0	1/3	3/5
110	7/10	1/2	5/8	1/4	2/3	2/3	0	1/2
111	1/2	3/10	5/12	1/8	2/5	2/5	1/2	0

Matrice delle vittorie per sequenze lunghe 3 e monete "oneste". In ogni colonna c'è una sequenza che vince con probabilità maggiore di 1/2, quindi ogni sequenza "perde" rispetto ad almeno un'altra.

Riferimenti bibliografici

[1] H. Hotelling, "Stability in Competition", *Economic Journal*, 39, 153, 1929, pp. 41-57.

[2] P. Jensen, "Network-based predictions of retail store commercial categories and optimal locations", *Physical Review E*, 74, 2006.

[3] W. Penney, "Problem 95: penney-ante", *Journal of Recreational Mathematics*, 2, 1969, p. 241.

[4] F. Bagnoli, "Come vincere al Casinò", *FisicaX*, 2015, disponibile online su http://fisicax.complexworld.net/argomenti/computer-caos-e-disordine/vincere-al-casino

[5] G.Cencetti, F. Bagnoli, F. Di Patti, D. Fanelli, "The second will be first: competition on directed networks", *Scientific Reports*, 6, 2016.